TECHNION - ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
32000 HAIFA, ISRAEL

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה
חיפה 32000

חדו"א 1מ - 104010

בוחן אמצע סמסטר, קייץ, תשנ"ה - 24.8.95

הוראות לנבחן:

משך הבוחן 90 דקות. אין להשתמש בחומר עזר (כולל מכונות חשוב). הקפד על כתב יד ברור ומסודר. נמק היטב את צעדיך! תשובות לא מנומקות לא יתקבלו. ציין על כריכת המחברת את השם ומספר הסטודנט באופן ברור. הבוחן מורכב מ־6 שאלות. משקלה של כל שאלה הוא 20 נקודות. תוכל לצבור מקסימום 100 נקודות.

---

1. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה על כל הישר הממשי, $f(-3) = -3$, $f(3) = 3$, ו־$|f'(x)| \leq 1$.
הוכח כי $f(0) = 0$.

2. א. מצא את כל נקודות אי-הרציפות של הפונקציה $f(x) = x^{\tan\frac{\pi x}{2}}$. איזה מהן ניתן לתקן?

ב. חשב את $f'(x)$.

3. תהי $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$.

א. מצא את תחומי העליה והירידה של $f(x)$.

ב. מצא את תחומי הקמירות של הפונקציה.

ג. מצא את כל האסימפטוטות לגרף של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות המינימום והמקסימום המקומי, ואת נקודות הפיתול של $f(x)$ (אם ישנן).

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

4. הוכח כי למשוואה $x^5 - 80x + 1995 = 0$ יש בדיוק שורש ממשי אחד.

5. תהי $f(x) = \arctan x$.

א. פתח את הטור מקלורן של $f(x)$ מסדר $n = 2$ עם שארית בצורה של לגרנז'.

ב. על סמך הטור מקלורן שקיבלת, הוכח כי לכל $x > 0$, $\arctan x < x - \frac{1}{3}x^3 + x^5$.

6. א. הוכח כי למשוואה

$$x^5 + 4x^3 + 22x - 2 = 0 \qquad (*)$$

קיים בדיוק שורש אחד בקטע $[0,1]$.

ב. בכדי לגלות את השורש הזה ברמת דיוק של 10^{-3}, הופעלה שיטת המשיקים של ניוטון על הפונקציה

$$f(x) = x^5 + 4x^3 + 22x - 2$$

בקטע $[0,1]$. לכל n טבעי, נסמן על ידי x_n את התוצאה המקורבת לשורש שמתקבלת בשיטה זו בשלב n. להלן התוצאות של ארבעת השלבים הראשונים:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0.3589743 \\ x_3 &= 0.1013107 \\ x_4 &= 0.0907787 \end{aligned}$$

הוכח כי אם a הוא השורש המדויק של המשוואה $(*)$ בקטע $[0,1]$ אזי $|x_4 - a| < 10^{-3}$. צטט את המשפט עליו הסתמכת.

ג. האם תוכל להסביר מדוע בכל שלב n בתהליך הנ"ל יתקיים $x_{n+1} < x_n$?

ד. האם תוכל להסביר מדוע בכל שלב n בתהליך הנ"ל יתקיים $x_n > a$?

בהצלחה!